

**Report sui risultati del progetto STM:**  
**“Approssimazione polinomiale e razionale in più dimensioni”**

**Proponente: Woula Themistoclakis (CNR - IAC di Napoli)**  
**Fruitore: Marc Van Barel (TU Leuven, Belgio)**  
**Periodo: 13–24 Maggio 2013**

L’attività di ricerca svolta è stata, a giudizio del proponente, molto interessante per i ricchi scambi di vedute e competenze, nonché fruttuosa per i risultati ottenuti, che indicano la strada per futuri originali sviluppi e pubblicazioni.

Partendo dall’interesse del proponente per l’approssimazione di de la Vallée Poussin, la ricerca si è soprattutto focalizzata su questo tipo di approssimazione.

Classicamente, l’approssimazione di de la Vallée Poussin (VP) è definita da medie ritardate delle somme parziali di una corrispondente serie di Fourier. Tali medie risultano particolarmente vantaggiose nel caso di funzioni che sono quasi ovunque molto regolari ad eccezione di isolati punti di singolarità. In tal caso i classici polinomi di Fourier e Lagrange falliscono nel dare un’approssimazione ottimale, presentando vicino alle singolarità oscillazioni e overshoots che vengono poi mantenute anche nelle parti regolari e non decrescono al crescere del grado di approssimazione. Questo fenomeno, noto come fenomeno di Gibbs, viene superato con le medie di VP delle somme di Fourier che forniscono successioni di polinomi uniformemente convergenti alla funzione da approssimare.

Naturalmente, i polinomi di VP sono determinati dai coefficienti di Fourier della funzione, tipicamente computati per mezzo di un’opportuna formula di quadratura che permette di mantenere nel discreto le buone proprietà di approssimazione dell’operatore continuo e fornisce in alcuni casi polinomi interpolanti la funzione nei nodi della formula di quadratura usata. Tuttavia, mentre nel caso univariato si possono usare le ben note formule Gaussiane, in più dimensioni la scelta di una idonea formula di cubatura da applicare, resta un problema di non facile soluzione.

Operando diversi esperimenti numerici, abbiamo scoperto che è possibile ottenere un’approssimazione discreta comparabile con la classica approssimazione di VP, anche considerando medie ritardate di approssimazioni discrete ai minimi quadrati. Poiché la scelta dei nodi del corrispondente prodotto interno discreto risultava abbastanza flessibile, abbiamo concentrato i nostri sforzi ad analizzare le proprietà di queste alternative medie di VP, piuttosto che alla ricerca di “buoni” punti.

Nel caso univariato abbiamo trovato, attraverso ottimizzazione numerica, migliori scelte dei pesi delle medie che danno valori ottimali delle costanti di Lebesgue. Abbiamo inoltre confrontato il comportamento, rispetto al fenomeno di Gibbs, delle approssimanti VP continue con quello delle versioni discrete ottenute via quadratura, concludendo che il caso continuo opera meglio della variante interpolante. L’alternativa discreta di VP ai minimi quadrati che abbiamo scoperto durante il progetto, possiede anch’essa la proprietà di smorzare

l'effetto di Gibbs.

Accanto al caso univariato sull'intervallo  $[-1, 1]$  (Chebyshev, Legendre) e su  $[0, \infty)$  (Laguerre) abbiamo effettuato diversi tests sulla sfera unitaria, usando le armoniche sferiche come funzioni di base. Gli esperimenti numerici indicano simili proprietà tra l'approssimazione di VP continua e la variante discreta ai minimi quadrati. Inoltre si è misurato un'errore di approssimazione in norma uniforme molto più basso di quello ottenuto recentemente da Ian H. Sloan utilizzando medie di VP discrete dedotte dall'operatore continuo per mezzo di complicate formule di cubatura.

Un grande vantaggio di questo nuovo metodo è la sua facile implementazione che non necessita di alcuna formula di quadratura o cubatura per ottenere le proprietà di iper-interpolazione.

Abbiamo già analizzato dal punto di vista teorico parte dei risultati ottenuti, ma altro lavoro in questa direzione resta da fare. Siamo convinti che questi nuovi risultati condurranno ad almeno un articolo in collaborazione da sottomettere.

Napoli, 27 Maggio 2013

Woula Themistoclakis

