

**Relazione finale del soggiorno scientifico del Prof. Chaouqi Misbah a Firenze
(14-28 giugno 2011), nell'ambito del programma Short Term Mobility**

La collaborazione con il Prof. Misbah si colloca nell'ambito dello studio dei sistemi fuori dall'equilibrio, che sviluppano una struttura spaziale non banale (*pattern formation*), la cui dinamica è l'oggetto della nostra analisi. Alcuni esempi, presi da campi diversi, sono la formazione di celle di convezione nei fluidi, la separazione di fase in miscele di materiali granulari, la nanostrutturazione di una superficie cristallina che cresce.

Da un punto di vista più formale, possiamo dire che il sistema è descritto da una equazione differenziale alle derivate parziali, del tipo

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \mathcal{N}[u]$$

dove $u(\vec{x}, t)$ rappresenta il parametro d'ordine: il campo di velocità in un fluido, il campo di densità in un materiale granulare, l'altezza locale in una superficie. Il membro a destra dell'equazione, $\mathcal{N}[u]$, indica invece un generico operatore non lineare, che agisce sulle variabili spaziali di u e le cui proprietà di invarianza e simmetria dipendono dal problema specifico sotto studio.

Il sistema può spesso avere una evoluzione semplice, in cui il parametro d'ordine è omogeneo e indipendente dal tempo, ad esempio il materiale granulare che rimane omogeneo o la superficie cristallina che rimane piatta. Generalmente, però, tale soluzione “banale risulta instabile se la forza esterna che mantiene il sistema fuori dall'equilibrio supera una certa soglia. Noi ci siamo concentrati sui processi di crescita di una superficie cristallina, soggetta a un flusso di particelle, atomi o molecole, in un ambiente di ultra alto vuoto (sperimentalmente, si parla di epitassia di fascio atomico o molecolare). In questo caso, la forza esterna è l'intensità F del flusso di particelle incidenti e il parametro d'ordine è l'altezza locale della superficie, $h(\vec{x}, t)$, la cui dinamica “banale corrisponde a una crescita uniforme e piatta, $h(\vec{x}, t) = Ft$. Se definiamo la posizione rispetto alla altezza media, $u(\vec{x}, t) = h(\vec{x}, t) - Ft$, l'equazione di crescita ha la forma [1]:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\nabla \cdot \vec{j}(\nabla u) - (\nabla^2)^2 u$$

dove il primo termine rappresenta gli effetti di non equilibrio, dovuti al flusso e il secondo termine rappresenta i processi di rilassamento della superficie, presenti anche all'equilibrio.

La dinamica dell'equazione di crescita dipende ovviamente dalla forma specifica della corrente $\vec{j}$, ma simulazioni numeriche, risultati sperimentali e la teoria di equazioni simili in una dimensione spaziale suggeriscono che ci possiamo aspettare che la superficie sviluppi una struttura tipo-piramidale, la cui taglia cresce indefinitamente nel tempo (coarsening perpetuo), oppure cresce fino a un valore critico (coarsening interrotto), oppure rimane costante fin dall'inizio, ma con l'altezza della struttura piramidale che divergere (no coarsening).

Nostri lavori precedenti [2] hanno mostrato come sia possibile studiare la dinamica della emergente struttura di non equilibrio, tramite una analisi perturbativa delle soluzioni stazionarie, usando la tecnica della scale multiple. Si tratta cioè di perturbare opportunamente le soluzioni $u_0(\vec{x})$, tali che $\mathcal{N}[u_0] = 0$. Queste soluzioni appaiono essere spazialmente periodiche, quindi caratterizzate da una ben determinata lunghezza d'onda $\lambda = 2\pi/q$ e da opportune fasi, che nel caso, ad esempio, di una struttura piramidale

quadrata, saranno date da $\phi_1 = qx$ and $\phi_2 = qy$. La loro perturbazione determina che q , e quindi ϕ_1 e ϕ_2 hanno una dipendenza lenta da $\vec{x}$ e da t e questa dipendenza è descritta da opportune equazioni di diffusione della fase, della forma:

$$\frac{\partial \psi_1}{\partial T} = D_{11} \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial X^2} + D_{22} \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial Y^2} + D_{12} \frac{\partial^2 \psi_2}{\partial X \partial Y} \quad (1)$$

$$\frac{\partial \psi_2}{\partial T} = D_{22} \frac{\partial^2 \psi_2}{\partial X^2} + D_{11} \frac{\partial^2 \psi_2}{\partial Y^2} + D_{12} \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial X \partial Y} \quad (2)$$

dove ψ_i, X, Y, T sono le fasi e le variabili spaziali e temporale lente, opportunamente riscalate.

I risultati principali della collaborazione con il Prof. Chaouqi Misbah, durante il suo soggiorno a Firenze sono qui di seguito riassunte:

- Abbiamo ricavato le equazioni di diffusione della fase per una generica corrente $\vec{j}(\nabla u)$, sia per una simmetria quadrata che per una simmetria triangolare delle soluzioni stazionarie periodiche.
- Abbiamo trovato le condizioni necessarie e sufficienti affinché le fasi siano instabili, dando luogo, perciò, a un processo di coarsening.
- Tramite uno sviluppo debolmente nonlineare, abbiamo trovato le espressioni analitiche delle soluzioni stazionarie quando la loro ampiezza è piccola. In questo limite, si dimostra che la condizione di esistenza del coarsening è che la lunghezza d'onda della soluzione stazionaria sia una funzione crescente della sua ampiezza.

La nostra collaborazione continuerà anche nel futuro, essendo integrata nel più ampio progetto di tesi di Sofia Biagi, una studentessa della laurea specialistica in Fisica presso l'Università di Firenze. Sofia Biagi, della cui tesi sono relatore, visiterà il Prof. Misbah a Grenoble nel mese di settembre e farà un seminario presso il suo Istituto.

Riferimenti bibliografici

- [1] P. Politi *et al.*, Phys. Rep. **324**,271 (2000); C. Misbah *et al.*, Rev. Mod. Phys. **82**, 981 (2010).
- [2] P. Politi and C. Misbah, Phys. Rev. Lett. **92**, 090601 (2004); Phys. Rev. E **73**, 036133 (2006); C. Misbah and P. Politi, Phys. Rev. E **80**, R030106 (2009).



(Paolo Politi)
Istituto dei Sistemi Complessi, Firenze