

Torino, 15 Dicembre 2015

Relazione scientifica sull'attività svolta nell'ambito del programma STM 2015 "Information geometry of power-law distributions", del Dr. Antonio Maria Scarfone dell'Istituto dei Sistemi Complessi, presso il Dipartimento di Ingegneria Elettrica ed Elettronica dell'Università di Ibaraki, Hitachi-city, Giappone

Durante la permanenza del Dr. Scarfone presso l'Università di Ibaraki si sono gettate le basi per una collaborazione con il Dr. Wada riguardante lo studio dei fondamenti epistemologici dalla teoria della meccanica statistica generalizzata attraverso il formalismo della geometria dell'informazione. La principale motivazione di questa ricerca è legata allo studio delle distribuzioni non-Gibbsiane che spesso caratterizzano i comportamenti statistici di molti sistemi complessi. Infatti, con sempre maggiore ricorrenza, distribuzioni a legge di potenza vengono osservate tanto nelle scienze fisiche e biologiche quanto nei sistemi economici e sociali.

I metodi della geometria differenziale, applicati alla meccanica statistica, hanno già dato interessanti risultati quando vengono usati per studiare sistemi statistici governati da entropie generalizzate di tipo traccia [1,2]. In questo caso, oggetti geometrici, come la metrica e la curvatura di una varietà statistica, possono essere usati per caratterizzare le correlazioni presenti nel sistema e dare informazioni rilevanti sulle interazioni che governano il sistema, sia a livello locale, che a livello globale, come nel caso dello studio delle transizioni di fase.

E' auspicabile che tali risultati si possano ancora trovare anche quando i sistemi statistici sono governati da forme entropiche non di tipo traccia, tra le quali troviamo la ben nota entropia di Renyi e la più generale famiglia a due parametri di Sharma-Mittal. Questa osservazione costituisce il punto di partenza dell'attività di ricerca in oggetto.

In particolare, si sono trattati i seguenti punti:

- 1) Forme entropiche alla Sharma-Mittal, a cui l'entropia di Renyi appartiene come sottofamiglia ad un parametro, sono esprimibili attraverso la media non lineare alla Kolmogorov-Nagumo (KN) del logaritmo del bit di informazione (entropia di Hartley). Si è quindi studiato la consistenza della struttura di Legendre della teoria nel formalismo di KN, ottenendo i principali potenziali termodinamici e le loro relazioni con le summenzionate forme entropiche. Si sono ottenute le relazioni funzionali tra i moltiplicatori di Lagrange e i valori medi delle grandezze osservabili (valori medi alla KN), utilizzati per derivare le distribuzioni di equilibrio del sistema attraverso il principio di massima entropia. Tali distribuzioni hanno un comportamento a legge di potenza, eccezione fatta per la sottofamiglia di Renyi, che nel formalismo KN risulta invece essere caratterizzata da un comportamento asintotico di tipo esponenziale.

- 2) L'entropia di Renyi, così come le entropie appartenenti alla famiglia di Sharma-Mittal, sono spesso usate in meccanica statistica nel contesto di medie lineari piuttosto che alla KN. Si è pertanto applicato il formalismo della geometria dell'informazione per studiare il manifold statistico delle distribuzioni di equilibrio generato da queste forme entropiche, soggette a vincoli ottenuti usando medie lineari. Tale manifold è costituito da distribuzioni a legge di potenza, le quali definiscono una famiglia di esponenziali generalizzati, ovvero distribuzioni non-Gibbsiane di cui la ben nota distribuzione di tipo esponenziale di Gibbs ne rappresenta un caso limite. Il manifold statistico così ottenuto ammette una doppia struttura geometrica, sia Hessiana che dually-flat. Questo presuppone l'esistenza di due differenti sistemi di coordinate e dei rispettivi potenziali, da cui si possono ricavare i tensori metrici (forme Hessiane rispetto ai potenziali), i quali definiscono due differenti varietà geometriche piane (a curvatura nulla), duali l'un l'altra. Tale dualità è esplicitata dall'esistenza di una struttura alla Legendre tra le coordinate e i potenziali, quest'ultimi identificati con la forma entropica di partenza e il corrispondente potenziale termodinamico di Massieu.
- 3) Si è derivata un'espressione analitica della divergenza alla Bregman, consistente con la struttura Hessiana della metrica. Questa divergenza, nota in fisica come entropia relativa, permette di studiare fenomeni di non equilibrio attraverso l'introduzione di equazioni cinetiche alla Fokker-Planck, che, nel contesto delle entropie in esame, risultano essere caratterizzate da un termine diffusivo non lineare che permette di descrivere fenomeni di rilassamento all'equilibrio sub-diffusivi e/o super-diffusivi.

Lo studio condotto durante la permanenza del Dr. Scarfone presso l'università di Hibaraki ha permesso di raccogliere sufficienti informazioni per iniziare la stesura di un paio di articoli scientifici attualmente in fase di sviluppo.

[1] T. Wada, H. Matsuzoe and A.M. Scarfone, "*Thermodynamic potentials in the k -thermostatistics*", Entropy **17**, 7213 (2015).

[2] T. Wada and A.M. Scarfone, "*Information geometry on the kappa-thermostatistics*", Entropy **17**, 1204 (2015).

Firma del fruitore

Antonio Maria Scarfone

