

# PROGRAMMA STM SIMUGLOB: RAPPORTO FINALE

SILVIA BERTOLUZZA

Nell'ambito del soggiorno in seno all'equipe del Prof. Prud'homme presso l'IRMA di Strasburgo, si è affrontato lo studio di condizioni ai limiti non standard per le equazioni di Stokes e di Navier-Stokes. Questo problema assume un'importanza particolare nella simulazione realistica di flussi sanguigni. Per affrontare lo studio dal punto di vista teorico si è iniziato dal problema lineare.

Il primo obiettivo che ci si è posti è stato quello di riuscire ad imporre la pressione in uscita (o in entrate e in uscita). Per raggiungere questo obiettivo ci si è inizialmente concentrati sull'equazione di Stokes, per la quale si sono considerate tre formulazioni equivalenti, differenti l'una dall'altra per la scelta dell'operatore lineare che agisce sulla velocità. Si sono più precisamente considerate la formulazione classica

$$-\Delta u + \nabla p = f, \quad \nabla \cdot u = 0,$$

dove tale operatore è il Laplaciano, la formulazione che potremmo chiamare "meccanica"

$$-\nabla(\nabla u + \nabla u^T) + \nabla p = f, \quad \nabla \cdot u = 0,$$

dove tale operatore è invece  $-\nabla(\nabla u + \nabla u^T)$ , ed infine la formulazione in termini di rotore

$$\nabla \wedge (\nabla \wedge u) + \nabla p = f, \quad \nabla \cdot u = 0,$$

dove l'operatore agente sulla velocità è  $\nabla \wedge (\nabla \wedge u)$ . Ciascuna di queste formulazioni ha caratteristiche intrinseche che la rendono più o meno adatta ad essere utilizzata per la simulazione del flusso del sangue (visto come una sospensione di globuli rossi) in vene ed arterie. In particolare, ciascuna delle tre formulazioni corrisponde ad una differente condizione al bordo di tipo naturale.

Si è osservato che la formulazione in termini di rotore permette naturalmente di imporre il valore della pressione in una porzione del bordo. D'altro canto la formulazione meccanica è preferita, in quanto permette facilmente di imporre le condizioni di rigidità locale necessarie per la simulazione di una sospensione di particelle. Si sono quindi studiate

le relazioni fra le differenti formulazioni e fra le differenti condizioni al bordo, arrivando a dimostrare che per un bordo rettilineo (in 2D) o piano (in 3D), grazie alla condizione di incomprimibilità, se si impone in maniera essenziale la condizione sulla velocità  $u \wedge n = 0$ , le condizioni al bordo naturali corrispondenti alle diverse formulazioni si riducono tutte alla condizione che ci interessa.

Si è quindi affrontato lo studio del problema ottenuto imponendo la condizione essenziale  $u \wedge n = 0$  tramite moltiplicatori di Lagrange. Per il corrispondente problema continuo si sono dimostrate la stabilità e l'esistenza di una soluzione unica. Si stanno attualmente studiando gli aspetti teorici ed implementativi legati alla discretizzazione numerica di detto problema, in vista di un'applicazione delle tecniche sviluppate alla simulazione del flusso sanguigno.

In parallelo si è affrontata l'analisi teorica della discretizzazione numerica dell'equazione di Stokes mediante il cosiddetto *Fat boundary method*. Si è dimostrato che la formulazione continua, consistente in due problemi di Stokes accoppiati (uno posto in una "scatola" contenente il dominio originario del problema considerato e il secondo posto in una striscia adiacente alla porzione interna alla "scatola" del bordo di Dirichlet per il problema considerato) è ben posta. Si sono inoltre discusse le condizioni sotto le quali la discretizzazione di detto problema ammette soluzione unica che converge, per il passo di discretizzazione  $h$  che tende a 0, alla soluzione del problema originario.

Come conseguenza del mio soggiorno a Strasburgo si è quindi instaurata una proficua collaborazione con l'equipe del Prof. Prud'homme, che porterà in tempi brevi all'inserimento dell'Istituto di Matematica Applicata del CNR nel consorzio Feel++ (con il quale l'Istituto sta già a collaborando attivamente). In seguito al lavoro svolto sono attualmente in preparazione tre articoli scientifici.

#### REFERENCES

1. S. Bertoluzza, M. Ismail, C. Prud'homme, M. Szopos, "Imposing pressure boundary conditions with Lagrangian multipliers", in preparation.
2. S. Bertoluzza, V. Chabannes, M. Ismail, C. Prud'homme, "A Saddle point formulation of the Fat Boundary Method: Analysis and Implementation with Feel++", in preparation.
3. S. Bertoluzza, V. Chabannes, M. Ismail, C. Prud'homme, "The Fat Boundary Method for the Stokes problem", in preparation.